OLIMPIADAS MATEMÁTICAS
DEPR
4 DE ABRIL 2014

Instrucciones: Conteste cada pregunta comenzando en la cara de la hoja de papel donde se presenta la pregunta y continuando al dorso de ser necesario. Se corregirá solamente el trabajo que aparezca en ambos lados de la hoja de una pregunta. Cada pregunta tiene un valor de 10 puntos.

Instructions: Answer each question beginning on the face of the sheet of paper where the question appears and use the back of the page if needed. Only the work that appears on both sides of the sheet of paper with the statement of a given problem will be graded. Each problem has a total value of 10 points.

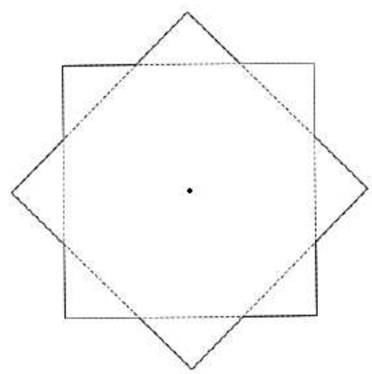
1. Si gallina y media pone huevo y medio en día y medio, ¿Cuántos huevos pone una gallina en tres días.

1. If a hen and a half lays an egg and a half in a day and a half, how many eggs are laid by a hen in three days?

   Solución:
   Como 1/2 gallina pone 1/2 huevo en día y medio, entonces 1 gallina pondría 1 en día y medio. Por lo tanto, 1 gallina pondría el doble de huevos en el doble del tiempo, tres días. Por lo tanto una gallina pone 2 huevos en tres días.
   Un método más algebraico: Si x es el número de días, y el número de huevos y z el número de gallinas, entonces xz es directamente proporcional al número de huevos puestos, es decir, para alguna constante k tenemos
   $$xz = ky$$
   Sustituyendo $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$ y $z = 1\frac{1}{2}$ en la relación anterior, se obtiene $k = 1\frac{1}{2}$. Tomando ahora, $x = 3$ y $z = 1$ tenemos
   $$\frac{\frac{3}{2}y}{1} = 3 \text{ es decir,}$$
   $$y = 2.$$

2. Si se rota un cuadrado 45 grados respecto a su centro se forma un polígono no convexo de 16 lados como el que se muestra. Si el cuadrado original tiene lados de 16 pulgadas, ¿cuál es el perímetro del polígono de dieciséis lados?

2. When a square rotates 45 degrees around its center a 16-sided non-convex polygon is formed as shown. If the given square has 16 inch sides, what is the perimeter of the 16-sided polygon?



Solución:
Llamaremos al cuadrado que posee lados horizontales en la figura el cuadrado original. Al rotar este cuadrado en torno a su centro se forman cuatro triángulos rectángulos isósceles sobre los lados del cuadrado original y todos son congruentes. Si x es la longitud del cateto de uno de estos triángulos, su hipotenusa es $\sqrt{2}x$ y el lado del cuadrado original es $16 = 2x+\sqrt{2}x = (2+\sqrt{2})x$. De aquí concluimos que

$$x = \frac{16}{2+\sqrt{2}}$$

Por lo tanto el perímetro deseado es

$$\begin{aligned} 16x &= 16\frac{16}{2+\sqrt{2}} \\ &= 128(2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

3. Sea n el producto de los primeros 500 números primos. ¿Cuántos ceros tiene al final el número n^2?
3. Let n be the product of the first 500 primes. How many final zeros does n^2 have?

Solución:
Por cada par de factores primos de 2 y 5 que aparecen en la factorización prima de un número, aparecerá un cero final en la representación decimal del número. Como los primos que entran en el producto de n solo incluyen un factor de 2 y un factor de 5, n tiene un cero final y n^2 tiene dos.

4. Si $4^x = 9$ y $9^y = 256$, determine el valor de xy.

4. If $4^x = 9$ and $9^y = 256$, find the value of xy.

Solución:
Como

$$\begin{aligned} \left(4^x\right)^y &= 9^y = 256 = 2^8 \text{ tenemos,} \\ \left(2^{2x}\right)^y &= 2^8 \text{ y} \\ 2^{2xy} &= 2^8. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $xy = 4$.

5. El año pasado, el coro tenía 30 niños más que niñas. Este año el número de miembros del coro aumentó en un 10 %, el número de niñas en un 20 % y el número de niños en un 5 % por ciento. ¿Cuántos miembros tiene el coro este año?

5. Last year the choir had 30 more boys than girls. This year the number of members of the choir increased by 10 %, the number of girls in 20 % and the number of boys in 5 % percent. How many members does this year's choir has?

Solución:

Si denotamos por v al número de varones en el coro el año pasado y por h al número de hembras ese año. Entonces

$$v = h + 30. \tag{1}$$

Denotaremos por v' y h' al número de varones y hembras respectivamente en el coro de este año. El problema provee la siguiente información:

$$v' + h' = 1.1(v + h). \tag{2}$$

$$h' = 1.2h \text{ y} \tag{3}$$

$$v' = 1.05\,v. \tag{4}$$

Combinando 3 y 4 y empleando 1 se deduce que

$$v' + h' = 1.2h + 1.05v \text{ y}$$

$$v' + h' = 1.2h + 1.05(h + 30). \tag{5}$$

También, se deduce de (2), (3), (4) y (1) que

$$1.1(v + h) = 1.2h + 1.05(h + 30) \text{ de donde se obtiene,}$$

$$1.1(2h + 30) = 1.2h + 1.05(h + 30) \text{ y se concluye que}$$

$$h = 30. \tag{6}$$

Por lo tanto $v = 60$. Sustituyendo estos datos en (2) vemos que

$$v' + h' = 1.1(60 + 30) = 99.$$

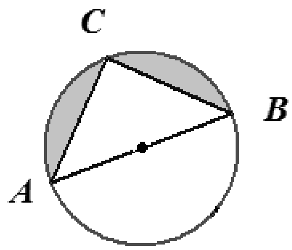
6. Cuando 1001 se divide por cierto número de un solo dígito, el residuo es 5. ¿Cuál es el residuo que se obtiene cuando se divide 2012 por el mismo número?

6. When 1001 is divided by a certain one digit number, the remainder is 5. What is the remainder when 2012 is divided by the same number?

Solución:
Sea d el número de un solo dígito por el que se divide. Entonces, como el residuo de la división por d es 5, podemos concluir que

$$1001 = q \cdot d + 5.$$

Como el residuo es menor que el divisor d, podemos concluir que $5 < d$. Como d es un número de un dígito, las posibilidades para el valor de d son $6, 7, 8$ o 9. Como d divide a $1001 - 5 = 996$ y como $7, 8$ y 9 no dividen a 996, el valor de d tiene que ser 6 (que sí lo divide). Finalmente, el residuo obtenido al dividir 2012 por 6 es 2.



7. Un triángulo isósceles recto se inscribe en una circunferencia de radio 5 de manera que el triángulo divide la circunferencia en cuatro regiones. ¿Cuál es la suma de las áreas indicadas?

7. An isosceles right triangle is inscribed in a circle of radius 5 dividing the area of the circle in four parts. What is the sum of of the indicated areas?

Solución:

Como el ángulo recto del triángulo inscrito subtiende un diámetro de la circunferencia (ver Figura), vemos que la hipotenusa del triángulo es 10. Por el teorema de Pitágoras, los catetos del triángulo dado miden $5\sqrt{2}$ unidades. Por consiguiente la altura del triángulo desde el ángulo recto es de 5 unidades. Por lo tanto, la suma de las áreas de las regiones más pequeñas es el área de la semicircunferencia menos la del triángulo dado, es decir,

$$\frac{\pi(5^2)}{2} - \frac{10(5)}{2} = \frac{25\pi}{2} - 25.$$

8. La sucesión $a, 451/2, c, d, 284$ siempre aumenta por la misma cantidad cuando se pasa de un término al siguiente. ¿Cuál es el valor de a?

8. The sequence $a, 451/2, c, d, 284$ always increases by the same amount as one moves from a given term to the following one. Determine the value of a.

Solución:
Igualando las diferencias sucesivas comenzando con el primer término, tenemos:

$$\frac{451}{2} - a = c - \frac{451}{2}, \text{ es decir,}$$

$$a + c = 451; \text{ empleando la próxima diferencia, tenemos} \tag{7}$$

$$c - \frac{451}{2} = d - c, \text{ es decir,}$$

$$4c - 2d = 451; \text{ empleando la tercera diferencia, tenemos} \tag{8}$$

$$d - c = 284 - d; \text{ por lo tanto,}$$

$$2d - c = 284. \tag{9}$$

Sumando (8) y (9) tenemos,

$$3c = 735 \text{ y se puede concluir que}$$

$$c = 245. \tag{10}$$

Sustituyendo (10) en (7) se obtiene que

$$a = 451 - c = 451 - 245 = 206.$$

9. Si $a+b+c=1$ y
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=3,$$
halle el valor de
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

9. If $a+b+c=1$ and
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=3,$$
find the value of
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Solución:
Notar que
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{1-(b+c)}{b+c}+\frac{1-(a+c)}{c+a}+\frac{1-(a+b)}{a+b}\\ &= \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}-3=3-3=0.\end{aligned}$$

10. Si un número x tal que $0 \leq x \leq 1$ tiene una expansión decimal infinita en la que todos los dígitos de la expansión son distintos de cero con la excepción de los dígitos del tercero al sexto, los cuales son iguales a cero, demuestre que $0.11 \leq x \leq 0.110001$.

10. If a real number x with $0 \leq x \leq 1$ has an infinite decimal expansion with all its digits different from zero with the exception of the digits in the positions from the third to the sixth, all of which are identically zero, show that $0.11 \leq x \leq 0.110001$.

Solución:
Como los dos primeros dígitos de la expansión decimal de x son al menos 1 está claro que $x \geq 1/10 = 1/10^2 = .11$. Como los dígitos de séptimo en adelante no pueden ser mayores que 9, tenemos que

$$\begin{aligned}
x &\leq \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{9}{10^7} + \frac{9}{10^8} \cdots \\
&= .11 + \frac{1}{10^6}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots\right) \\
+ &= .11 + \frac{1}{10^6}(.99999\cdots) \\
&= .11 + \frac{1}{10^6} = .110001.
\end{aligned}$$